

# Model konstytutywny skrępowanego ściskania fibrobetonu

## Constitutive model for restricted compression of fiber concrete

### 1. Wstęp

Beton wykazuje małą wytrzymałość na rozciąganie i niewielką odkształcalność. Zastosowanie stalowego zbrojenia znacznie poprawia jego mechaniczne właściwości, ale czasem jest niewystarczające. Podobnie, nie zawsze zwiększenie przekroju poprzecznego elementu konstrukcyjnego jest możliwe czy racjonalne. W elementach z szybko zmieniającym się obciążeniem, lub w obszarach o dużej aktywności sejsmicznej czy parasejsmicznej, celowe jest rozważenie dodatkowego zabezpieczenia.

Zastosowanie dodatkowego zbrojenia obwodowego zmienia stan naprężenia przekroju z jednoosiowego na trójosiowy. Taka ochrona elementu konstrukcyjnego przed rozłupaniem, znacznie zwiększa możliwości materiału. Stopień skrępowania, wynikający z zastosowania zbrojenia obwodowego, określony jest wskaźnikiem skrępowania,  $C_r$ . Wskaźnik ten określa stopień otulenia przekroju bocznym zbrojeniem, przy założeniu zastosowania minimalnej gęstości objętościowej stali, jak to wykazali w interesującej pracy Prasad i Kumar (1).

Dalszy wzrost wytrzymałości i odkształcalności betonu może być osiągnięty poprzez dodanie włókien do mieszanki betonowej. Włókna przenoszą wewnętrzne siły, blokują powstawanie i rozwój mikropęknięć i opóźniają dylatację materiału. Z tego powodu, działanie włókien uwidacznia się w końcowym etapie narastania odkształceń i spadku wytrzymałości. Wskaźnik wypełnienia włóknami,  $R_f$ , wskazujący na stopień wypełnienia betonu włóknami, jest iloczynem udziału masowego włókien w betonie i smukłości włókien. Ponadto, z uwagi na technologię betonowania, uwzględnia się stopień jednorodności ułożenia się włókien, zgodnie z przestrzennym modelem probabilistycznym (2). Należy podkreślić, że włókna wzmacniają materiał tak na rozciąganie jak i na ściskanie.

Tak wzmocniony materiał, o znacznie większej wytrzymałości i odkształcalności, jest obecnie często przedmiotem badań. Podstawowymi czynnikami wpływającymi na nośność elementu konstrukcyjnego są podłużne zbrojenie stalowe oraz naprężenia ściskające w betonie. Ponieważ własności mechaniczne stali są łatwe do określenia, a wpływ nośności betonu w strefie rozciąganej ma drugorzędne znaczenie, głównym przedmiotem badań jest zachowanie się betonu w strefie ściskanej. Niniejsza praca

### 1. Introduction

Concrete has low strength in tension and poor ductility. A simple use of steel reinforcement significantly improves those shortcomings, but sometimes is not sufficient. Enlargement of the structural element cross-section is not always possible or rational. In elements with high frequently changing load or in regions with a higher level of seismic or paraseismic risk, other precautions have to be considered.

Passive restricting confinement changes the uniaxial compression of the cross-section into triaxial stress state. That considerably increases material performance, protecting structural member from spalling. The degree of confinement induced by lateral reinforcement is indicated by confinement index,  $C_r$ . The index quantifies the level of confinement by lateral ties, provided that protective action of the lateral reinforcement starts from some minimal steel volume density, as it was shown in the interesting work of Prasad and Kumar (1).

Further increase in strength and strain of concrete can be achieved by the addition of fibers in the concrete mix. Fibers can transfer internal forces, hold back the microcracks and delay dilation of material. For this reason, the action of fibers is observable mainly in the post-peak region. The action of fibers reinforcement is quantified by the reinforcing index,  $R_f$ , a product of mass and aspect ratios of fibers. Moreover, due to the particularity of the concrete mix placing technology, the fiber orientation factor can be used, according to probabilistic model in 3D space (2). It is worth to underline, that fibers enhance material performance both: in compression as well as in tension.

The performance of threefold reinforced material, with greatly improved reliability and durability, engages the attention of investigations nowadays. The essential factors of the structural member bearing capacity are the use of longitudinal reinforcement and compression behavior of concrete. Since behavior of steel reinforcement is easily recognizable and concrete tensioned zone influence is of secondary importance, the main interest of investigations is the behavior of concrete in the compression zone. This paper presents an analytical model of stress-strain relationship based on the available experimental data.

przedstawia analityczny model związku naprężenie-odkształcenie określony na podstawie dostępnych badań doświadczalnych.

## 2. Krzywa naprężenie-odkształcenie w strefie ściskanej

Skrępowane ściskanie betonu zbrojonego włóknami było badane przez Prasada i Kumara (1) oraz Ramesha i in. (3) na próbkach o takich samych wymiarach 150 mm × 150 mm × 300 mm, ale różnych stopniach zbrojenia włóknami i skrępowania. W przypadku Ramesha i in. (3) 90 próbek zostało wykonanych z betonu zbrojonego włóknami stalowymi. W badaniach Prasada i Kumara (1), 300 próbek wykonano z samozagęszczającego się betonu zbrojonego włóknami szklanymi. W obu przypadkach próbki były zbrojone stalowymi wkładkami wzdłużnymi. Wyniki badań przedstawiono w postaci krzywych naprężenie-odkształcenie.

Uzyskane wykresy naprężenie-odkształcenie wykazują znaczne podobieństwo, pomimo różnych parametrów wzmocnienia włóknami i zbrojeniem obwodowym. Podobieństwo to doprowadziło autorów do wniosku, że wszystkie wyniki mogą być opisane jedną krzywą, przy zastosowaniu bezwymiarowych wartości na osiach. Autorzy zaproponowali liniowe poprawki dotyczące wytrzymałości kompozytowego betonu,  $f_u$ , i jego odkształcalności,  $\varepsilon_u$ :

dla betonu z włóknami stalowymi (3):

$$f_u: 1 + 0,55C_i; \quad 1,0228 + 0,1024R_i \quad [1]$$

$$\varepsilon_u: 1 + 5,2C_i; \quad 0,9899 + 0,2204R_i \quad [2]$$

a dla kompozytu z włóknami szklanymi (1):

$$f_u: 1 + 0,866C_i; \quad 1 + 0,101R_i \quad [3]$$

$$\varepsilon_u: 1 + 3,761C_i; \quad 1 + 0,407R_i \quad [4]$$

Wprowadzając bezwymiarowe naprężenia i odkształcenia poprzez znormalizowanie ich względem wytrzymałości na ściskanie,

$$\tilde{\sigma} = \sigma/f_u, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon(f_u) \quad [5]$$

otrzymano zunifikowaną krzywą  $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$ , w której wskaźniki zbrojenia  $R_i$  i skrępowania  $C_i$  jawnie nie występują.

Znormalizowana krzywa doświadczalna wykazuje maksimum i jest monotoniczna po obu stronach ekstremum [rysunek 1], przy czym beton z włóknami stalowymi wyróżnia nieco większą odkształcalność.

## 3. Aproksymacja znormalizowanego związku naprężenie-odkształcenie

Dla zastosowań praktycznych niezbędne jest przedstawienie znormalizowanej zależności naprężenie-odkształcenie w postaci ciągłej funkcji. W tym celu należy dobrać optymalną funkcję aproksymacyjną. Wybór autorów (1, 3) padł na funkcję niewymierną, potencjalnie zapewniającą dobrą aproksymację krzywych doświadczalnych  $\tilde{\sigma} - \tilde{\varepsilon}$ . Uważa się, że optymalna funkcja aproksymująca niewymierną

## 2. Stress-strain curve for compressed zone

Restricted compression of the fiber reinforced concrete was investigated by several authors. More recently, experiments of Prasad and Kumar (1) and Ramesh et al. (3) have been carried out on prisms of the same shape and size 150 mm × 150 mm × 300 mm, but for different levels of reinforcement and confinement indexes. In the work of Ramesh et al. (3), 90 specimens were cast from concrete with steel fiber reinforcement. In the second experimental work of Prasad and Kumar (1), 300 specimens of self-compacting concrete were reinforced with the glass fibers. In both cases, the specimens contained an additional longitudinal steel reinforcement. Experimental results have been presented in the form of stress-strains curves (1, 3).

Stress-strain diagrams indicated similar behavior of all specimens, despite different parameters of fiber and lateral reinforcement. That similarity led authors to the conclusion that there is a unique shape of the stress-strain relationship curve if expressed in the non-dimensional form, along both axes. The authors proposed linear correction forms of composite strength,  $f_u$ , and deformability,  $\varepsilon_u$ :

for steel fiber composite (3):

$$f_u: 1 + 0,55C_i; \quad 1,0228 + 0,1024R_i \quad [1]$$

$$\varepsilon_u: 1 + 5,2C_i; \quad 0,9899 + 0,2204R_i \quad [2]$$

for glass fiber composite (1):

$$f_u: 1 + 0,866C_i; \quad 1 + 0,101R_i \quad [3]$$

$$\varepsilon_u: 1 + 3,761C_i; \quad 1 + 0,407R_i \quad [4]$$

Taking compression strength as a reference,

$$\tilde{\sigma} = \sigma/f_u, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon(f_u) \quad [5]$$

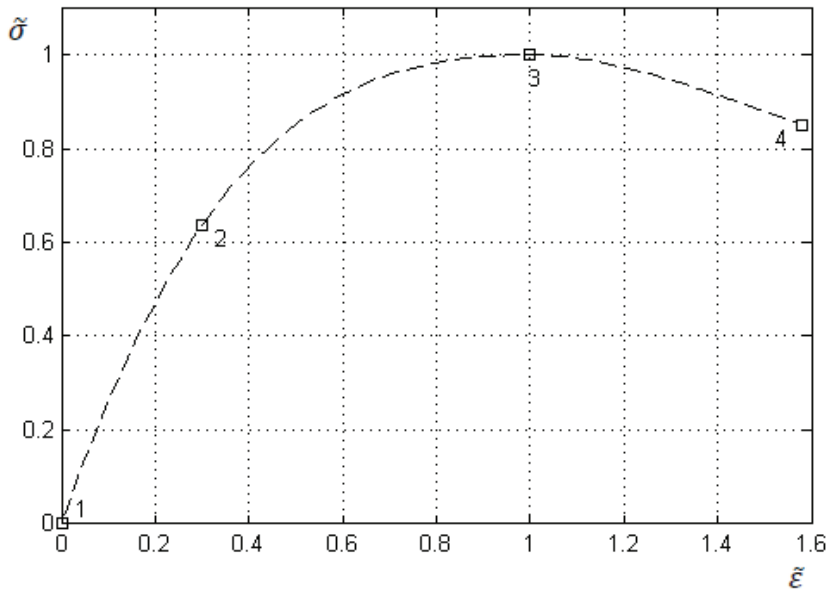
the influence of reinforcing index  $R_i$  and confinement index  $C_i$  is eliminated and unified dimensionless curve  $\tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon})$  is obtained.

Any experimental curve can be represented by the curve with one maximum at the center and monotonic form on both sides of the peak [Fig. 1], with slightly greater post-peak deformability for steel fiber reinforced concrete.

## 3. Approximation of normalized stress-strain relationship

For practical purposes, a continuous form of normalized stress-strain relationship is required. To this aim, an optimal approximation function should be chosen. The authors'(1) choice of rational function potentially gives good approximation to the normalized curve because the optimal rational function approximation is able to achieve substantially higher accuracy than the optimal polynomial approximation with the same number of coefficients (4). However, the particular procedure the authors (1, 3) adopted is not the best way.

A function of the general form:



Rys. 1. Znormalizowana krzywa naprężenie-odkształcenie

Fig. 1. Normalized stress-strain relationship

zapewnia osiągnięcie znacznie większej dokładności niż funkcja wielomianowa, z taką samą liczbą współczynników (4). Opisana poniżej metoda, zastosowana przez autorów tych doświadczeń (1, 3), nie jest jednak najlepsza i może być udoskonalona.

Funkcja w ogólnej postaci [6]:

$$\tilde{\sigma} = \frac{a\tilde{\varepsilon}}{1 + b\tilde{\varepsilon} + c\tilde{\varepsilon}^2} \quad [6]$$

została zastosowana do arbitralnie wybranego zbioru punktów, podanego w tablicy 1.

Wybrane punkty stwarzają pozory punktów charakterystycznych, ale nimi nie są. Poza pierwszym punktem ( $\tilde{\sigma} = \tilde{\varepsilon} = 0$ ), wybór pozostałych jest dyskusyjny. Uwaga ta dotyczy punktów 2 i 4 w sposób oczywisty, ale jest też słuszna w odniesieniu do punktu 3, którego rzędna może być łatwo określona z wystarczającą dokładnością, ale jego odcięta - już nie. Co więcej, dobór punktów wraz z funkcją [6], daje dla kompozytu z włóknami stalowymi:

$$\tilde{\sigma} = \frac{2,0233\tilde{\varepsilon}}{1 - 0,0747\tilde{\varepsilon} + 1,098\tilde{\varepsilon}^2} \quad [7]$$

z ekstremum dla  $\tilde{\sigma} = 1,00113$  przy  $\tilde{\varepsilon} = 0,954$ , a dla kompozytu z włóknami szklanymi:

$$\tilde{\sigma} = \frac{2,4152\tilde{\varepsilon}}{1 + 0,0471\tilde{\varepsilon} + 1,368\tilde{\varepsilon}^2} \quad [8]$$

z ekstremum  $\tilde{\sigma} = 1,0123$  przy  $\tilde{\varepsilon} = 0,855$ . W obu przypadkach ekstremum jest nieco przesunięte w kierunku mniejszych wartości odkształcenia.

W rezultacie, autorzy (1, 3) posługują się funkcją [6] osobno dla części krzywej przed ekstremum i osobno dla jej części opadającej, przyjmując dodatkowe warunki zszycia  $c = 1$  oraz symetrii:

$$\tilde{\sigma} = \frac{a\tilde{\varepsilon}}{1 + b\tilde{\varepsilon} + c\tilde{\varepsilon}^2} \quad [6]$$

was adopted for an arbitrarily chosen set of points [Table1].

The combination of points pretends to be a set of characteristic points although it is not. Except the first point ( $\tilde{\sigma} = \tilde{\varepsilon} = 0$ ), the choice of remaining points may be debatable. It is obvious for the point 2 and 4 but it is also true for the point 3, which ordinate can be assessed with good precision but abscissa – not at all. Moreover, the points, together with the function [6] give for the steel fiber composite an approximation:

$$\tilde{\sigma} = \frac{2,0233\tilde{\varepsilon}}{1 - 0,0747\tilde{\varepsilon} + 1,098\tilde{\varepsilon}^2} \quad [7]$$

with extreme at  $\tilde{\sigma} = 1,00113$ ,  $\tilde{\varepsilon} = 0,954$ , and for the glass fiber composite:

$$\tilde{\sigma} = \frac{2,4152\tilde{\varepsilon}}{1 + 0,0471\tilde{\varepsilon} + 1,368\tilde{\varepsilon}^2} \quad [8]$$

with extreme at  $\tilde{\sigma} = 1,0123$ ,  $\tilde{\varepsilon} = 0,855$ . In both cases the function extreme shift to smaller values of abscissa.

Thus, the authors used the function [6] of the stress-strain curve for ascending and descending parts separately, with additional conditions of  $c = 1$  and "symmetry":

$$\tilde{\varepsilon} = 1: \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} = 0 \quad [9]$$

It means double use of one-parameter function:

$$\tilde{\sigma} = \frac{(2 + b)\tilde{\varepsilon}}{1 + b\tilde{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}^2} \quad [10]$$

The function gives for the steel fiber concrete, (3),  $b = 0,1128$  for ascending portion, and  $b = -0,3666$  for descending portion of the normalized curve. Similarly, the values of the parameter for the glass fiber concrete are  $b = 0,866$  for ascending part and  $b = -0,794$  for descendant part, (1).

Another inconvenience of the simplified form [10] appears during calculation of the cross-sectional forces. The integration of concrete stress over the compressed zone leads to three different formulae, depending on particular values of parameters.

Tablica 1 / Table 1

PUNKTY CHARAKTERYSTYCZNE ZNORMALIZOWANEJ KRZYWEJ  
SET OF CHARACTERISTIC POINTS FOR THE NORMALIZED CURVE

Kompozyt/Composite type	1	2	3	4
włókna stalowe/steel fibers	(0,0)	(0.3,0.564)	(1,1)	(1.7,0.85)
włókna szklane/glass fibers	(0,0)	(0.3,0.637)	(1,1)	(1.58,0.85)

$$\tilde{\varepsilon} = 1: \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{\varepsilon}} = 0 \quad [9]$$

Oznacza to dwukrotne zastosowanie funkcji z jednym parametrem:

$$\tilde{\sigma} = \frac{(2+b)\tilde{\varepsilon}}{1+b\tilde{\varepsilon}+\tilde{\varepsilon}^2} \quad [10]$$

W przypadku betonu z włóknami stalowymi Ramesh i in. (3) określili wartość parametru  $b = 0,1128$  w części wzmocnienia, i  $b = -0,3666$  w części opadającej. Podobnie, wartości parametru w przypadku betonu z włóknami szklanymi określono odpowiednio, jako  $b = 0,866$  i  $b = -0,794$ , (1).

Inna niedogodność przyjętej uproszczonej postaci [10] pojawia się podczas obliczania sił przekrojowych. Całkowanie analityczne naprężeń w strefie ściskanej betonu wymaga rozpatrzenia trzech szczególnych przypadków, zależnie od wartości odkształceń i wartości parametru  $b$ .

#### 4. Propozycja równania konstytutywnego

Dokładność aproksymacji funkcją wymierną zależy głównie od stopnia użytych wielomianów aproksymacyjnych, a tym samym od liczby współczynników. Suma stopni wielomianów licznika i mianownika jest nazywana wskaźnikiem funkcji. Wszystkie aproksymacje o tym samym wskaźniku wymagają podobnej ilości obliczeń i osiągają podobny stopień dokładności (5).

Metoda znajdowania optymalnej funkcji aproksymacyjnej polega na iteracyjnym poprawianiu ekstremów błędów, naprzemiennie zmieniających znak. Obrazowo mówiąc, poszukuje się takiego zbioru punktów 1...4, w których wartości funkcji aproksymacyjnej są dokładne, a naprzemiennie ekstrema błędów w punktach pośrednich są równe i najmniejsze. W teorii aproksymacji dowodzi się istnienia i jednoznaczności takiego zbioru punktów, zwanego alternansem. Metoda minimalizacji maksymalnych błędów wymaga dostatecznie gęstego zbioru punktów doświadczalnych, (4), i z tego powodu nie może być zastosowana w przypadku doświadczeń opisanych w pracach Prasada i Kumara (1) oraz Ramesha i in.(3).

Ideę rozwiązania nasuwa szczególna postać związku naprężenie-odkształcenie rekomendowana przez Eurokod 2, (6), w której używa się wielomianu stopnia wyższego w liczniku niż w mianowniku. Jest oczywiste, że dla ustalonego zbioru punktów charakterystycznych (od 1 do 4), ułamek funkcji niewymiernej drugiego lub trzeciego stopnia nad funkcją stopnia pierwszego jest nieprzywiedlny. W przeciwnym wypadku optymalne byłoby przybliżenie wielomianem pierwszego lub drugiego stopnia.

Przyjmując funkcję niewymierną w ogólnej postaci:

$$\tilde{\sigma} = \frac{a\tilde{\varepsilon}^2 + b\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + c} \quad [11]$$

otrzymuje się jednolitą i znormalizowaną krzywą, opisującą pełny zakres odkształcenia.

#### 4. A new proposal of constitutive equation

Approximation workability of the rational function depends mainly on the degrees of used polynomials, i.e. the number of coefficients. The sum of the polynomials degrees is called the function index. All approximations with the same index require similar amounts of computation and achieve similar accuracy, (5).

The strict procedure to find the optimal approximation of function consists on iterative improvement for the alternating extrema. Thus, we seek such set of points 1...4 for given form of a function that alternating extrema are equal and the smallest. Approximation theory gives proof of existence and unequivocality of such set, called alternans. However, the minimax technique requires a sufficiently dense set of intermediate points, (4). Having a few points at our disposal, providing from the experiments of Prasad and Kumar (1) as well as of Ramesh et al. (3), we have cannot apply this method.

The solution is coming from the particular form of the stress-strain relationship for compressed concrete, recommended by Eurocode 2 (6), where the degree of the polynomial in the numerator is greater than this in the denominator. For the given set of characteristic points (from 1 to 4), there is clear that the rational function of 2<sup>nd</sup> or 3<sup>rd</sup>-degree function over 1<sup>st</sup>-degree function would be nondegenerate and without common polynomial factors in numerator and denominator, otherwise quadratic or linear fitting curve would be satisfying.

Using the rational function fit in general form:

$$\tilde{\sigma} = \frac{a\tilde{\varepsilon}^2 + b\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + c} \quad [11]$$

we get unified and normalized functions that can be used in the whole range of deformation.

Similar general form of the rational function with higher index can be written as:

$$\tilde{\sigma} = \frac{a\tilde{\varepsilon}^3 + b\tilde{\varepsilon}^2 + c\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + d} \quad [12]$$

Both functions integrate easily, however, the closed forms of integrals are not needed when numerical integration method is used, as in point 5.

#### 5. Numerical results

a) the case of steel fiber concrete

For quadratic/linear approximation (symbol 2/1) and the set of characteristic points  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$  used: (0,0), (0.3,0.564), (1,1), (1.7,0.85), we have:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-1,3165\tilde{\varepsilon}^2 + 3,858\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 1,542} \quad [13]$$

For cubic/linear approximation (symbol 3/1) and the set of characteristic points: (0,0), (0.3,0.564), (0.98,0.9998), (1.02,0.9998), (1.7,0.85), we have:



Podobna funkcja niewymierna o wyższym indeksie ma postać:

$$\tilde{\sigma} = \frac{a\tilde{\varepsilon}^3 + b\tilde{\varepsilon}^2 + c\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + d} \quad [12]$$

Obie funkcje można łatwo całkować, choć wzory całkowania w postaci zamkniętej nie są potrzebne w przypadku całkowania numerycznego, zastosowanego w punkcie 5.

## 5. Wyniki numeryczne

### a) Przypadek betonu z włóknami stalowymi

Dla kwadratowej/liniowej aproksymacji (oznaczenie 2/1) i zbioru punktów charakterystycznych  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$ : (0,0), (0,3;0,564), (1,1), (1,7;0,85), otrzymujemy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-1,3165\tilde{\varepsilon}^2 + 3,858\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 1,542} \quad [13]$$

Dla aproksymacji sześcienniej/liniowej (oznaczenie 3/1) i zbioru punktów charakterystycznych: (0;0), (0,3;0,564), (0,98;0,9998), (1,02;0,9998), (1,7;0,85), mamy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{232\tilde{\varepsilon}^3 - 1069\tilde{\varepsilon}^2 + 1457\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 1618,6} \quad [14]$$

### b) Przypadek betonu z włóknami szklanymi

Dla aproksymacji 2/1 i zbioru punktów charakterystycznych  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$ : (0;0), (0,3;0,637), (1;1), (1,58;0,85), otrzymujemy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-1,025\tilde{\varepsilon}^2 + 2,986\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 0,9617} \quad [15]$$

Dla aproksymacji 3/1 i zbioru punktów charakterystycznych: (0;0), (0,3;0,637), (0,98;0,9998), (1,02;0,9998), (1,58;0,85), mamy:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-0,244\tilde{\varepsilon}^3 - 0,08745\tilde{\varepsilon}^2 + 1,907\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 0,5753} \quad [16]$$

Niektóre szczegóły aproksymacji podano w tabelicy 2: wartość  $\tilde{\sigma}_{max}$  i położenie ekstremum  $\tilde{\varepsilon} (\tilde{\sigma}_{max})$ , maksymalny błąd względny (odniesiony do danych wejściowych) oraz położenie  $\tilde{\sigma} = 0,85$  na wznoszącej się części krzywej.

Należy odnotować niemal dwukrotnie większy błąd względny dla aproksymacji 3/1 występujący na części krzywej pomiędzy punktami 1 i 2. Wynika z tego, że punkt 2 powinien być lepiej dobrany.

Porównanie zaproponowanych krzywych z oryginalnymi przedstawiono na rysunkach (2) i (3).

Przedstawione jednolite i znormalizowane równania konstytutywne mogą być stosowane do obliczenia sił przekrojowych (siły podłużnej i momentu gnącego), a także do określenia

Tablica 2 / Table 2

### PORÓWNANIE WYNIKÓW NUMERYCZNYCH

### COMPARISON OF NUMERICAL RESULTS

Typ/type	równ. nr eq. n.	$\tilde{\sigma}_{max}$	$\tilde{\varepsilon} (\tilde{\sigma}_{max})$	błąd maks./max. error	$\tilde{\varepsilon} (\tilde{\sigma}=0,85)$
1/2	[6]	1	1	(przyjęto 0/0 assumed)	0.5886
1/2	[7]	1	1	(przyjęto 0/0 assumed)	0.4981
2/1	[12]	1.004	1.084	< 0.9 %	0.5859
3/1	[13]	1.0006	1.0	< 1.8 %	0.5703
2/1	[14]	1.0027	0.935	< 1%	0.5052
3/1	[15]	1.0002	1.0	< 1.9 %	0.5165

$$\tilde{\sigma} = \frac{232\tilde{\varepsilon}^3 - 1069\tilde{\varepsilon}^2 + 1457\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 1618,6} \quad [14]$$

b) the case of glass fiber concrete

For quadratic/linear approximation (symbol 2/1) and the set of characteristic points  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\varepsilon})$  used: (0,0), (0.3,0.637), (1,1), (1.58,0.85), we have:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-1,025\tilde{\varepsilon}^2 + 2,986\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 0,9617} \quad [15]$$

For cubic/linear approximation (symbol 3/1) and the set of characteristic points: (0,0), (0.3,0.637), (0.98,0.9998), (1.02,0.9998), (1.58,0.85), we have:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-0,244\tilde{\varepsilon}^3 - 0,08745\tilde{\varepsilon}^2 + 1,907\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\varepsilon} + 0,5753} \quad [16]$$

Some details of the approximation results are given in Table 2: maximal value,  $\tilde{\sigma}_{max}$  and its position,  $\tilde{\varepsilon} (\tilde{\sigma}_{max})$ , maximal relative error (compared to input data) and position of  $\tilde{\sigma} = 0,85$  on the ascending part of the curves.

Notice the relative errors for the approximations of the 3/1 type are almost twice higher and occur on the curve part between points 1 and 2. It follows, that the point no 2 should be better assessed.

Comparison of the proposed curves with original ones is presented on the Fig. 2 and 3.

The unified and normalized constitutive equations presented can be used for computing cross-sectional forces (axial force and bending moment) and for retrieval of the relationship between bending moment and member curvature. For the purpose, all needed material, and structural data were assumed the same as in the experimental work of Prasad and Kumar (1). The stress-strain relationships for the steel longitudinal reinforcement and for fiber reinforced concrete in tension were assumed linear elastic-plastic, without hardening. The cross-section dimension was the same as in the experiments of Prasad and Kumar (1) i.e. 150 mm × 150 mm with rather an important degree 2.15% of longitudinal reinforcement (one side) for better use of compressed zone. The standard bearing capacity of the cross-section, according to Eurocode 2, was 13.75 kNm. In numerical calculations, the linear distribution

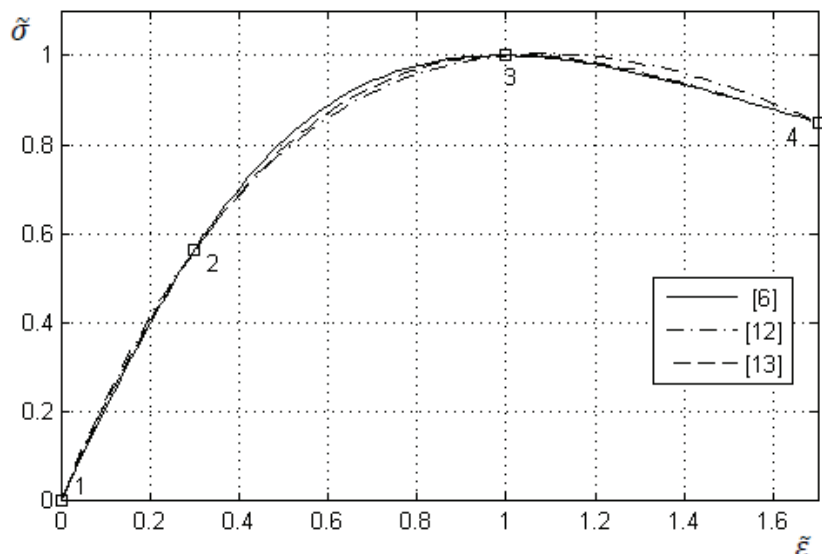
zależności krzywizny osi pręta od momentu zginającego. W tym celu, wykorzystano wszystkie niezbędne dane materiałowe z pracy Prasada i Kumara (1).

Podobną metodę zastosowano w przypadku stali zbrojeniowej i rozciągania betonu zbrojonego włóknami wykorzystując naprężenie-odkształcenie liniowo sprężysto-plastyczne, bez wzmocnienia. Wymiary przekroju poprzecznego przyjęto takie same jak w doświadczeniach Prasada i Kumara (1) 150 mm × 150 mm, ze stopniem zbrojenia 2,15% [jednostronnym] w celu lepszego wykorzystania strefy ściskania. Standardowa nośność takiego przekroju według Eurokodu 2 wynosi 13,75 kNm. W obliczeniach numerycznych założono liniowy rozkład odkształceń wzdłuż wysokości przekroju. Naprężenia w betonie całkowano numerycznie z błędem względnym mniejszym niż 0,01%. Dla zerowych wartości parametrów  $C_i$  i  $R_i$ , uzyskano nośność przekroju 13,77 kNm, niemal identyczną z wartością normową.

Zmieniając ekstremalne wartości odkształceń ściskania i stosując metodę bisekcji do określenia położenia osi obojętnej, uzyskano jednolitą i znormalizowaną krzywą moment - krzywizna, którą pokazano na rysunku 4. Na tym rysunku pokazano tylko jedną krzywą z uwagi na niezauważalne różnice wyników uzyskanych z równań [7] i [12]. Punkt przejścia do spłaszczonej części krzywej odpowiada pojawieniu się wpływu składowej plastycznej po stronie rozciąganej. Ekstremalną wartość momentów zginających uzyskuje się dla  $\tilde{\epsilon} \cong 1,3$ . Oznacza to przewagę wzmocnienia w odpowiedzi przekroju (2).

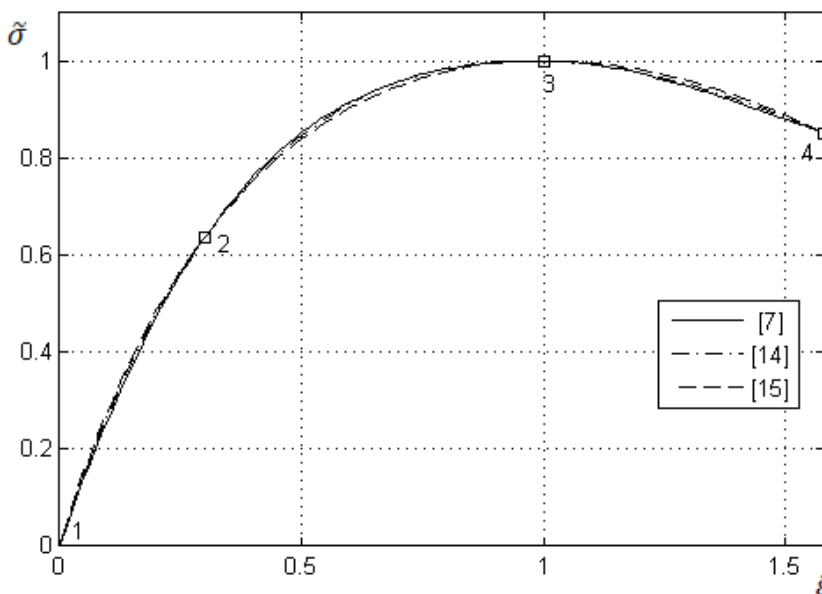
## 6. Wnioski

1. Zaproponowana jednolita i znormalizowana krzywa naprężenie-odkształcenie bardzo dobrze odwzorowuje dane doświadczalne.
2. Nowa funkcja niewymierna zastępuje dwie oryginalne o tym samym wskaźniku, w przypadku każdej z nich.
3. Zaproponowane związki naprężenie-odkształcenie można łatwo całkować.
4. Ekstrapolacja przedstawionych równań na przypadek zginania jest prosta i daje poprawne wyniki. Wymaga jednak pełniejszego potwierdzenia doświadczalnego.



Rys. 2. Ściskanie w warunkach skrupowanych odkształceń betonu z włóknami stalowymi

Fig. 2. Restricted compression of steel fiber concrete

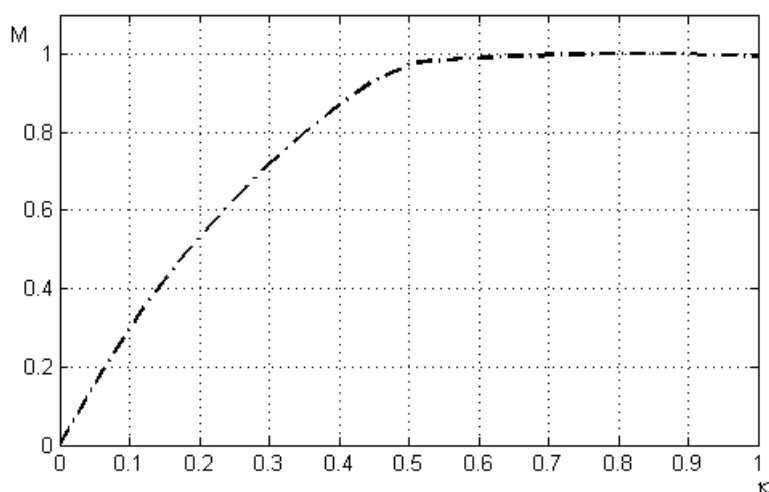


Rys. 3. Ściskanie w warunkach skrupowanych odkształceń betonu z włóknami szklanymi

Fig. 3. Restricted compression of glass fiber concrete

of strain was assumed. Concrete stresses were integrated numerically with the relative error less than 0.01 %. Using the zero values of  $C_i$  and  $R_i$  parameters, almost the same value 13.77 kNm of bearing capacity was retrieved.

Changing extreme values of compression strain and using bisection method for determination of neutral axis position, a unified and normalized curve moment - curvature was obtained, Fig. 4. In the figure, only one curve is shown because the differences between the use of formulae [7] and [12] were not distinguishable. The point where the curve becomes flatter corresponds to the onset of plastic component from the tensioned side. The extreme value



Rys. 4. Zależność krzywizny od momentu zginającego (wielkości bezwymiarowe)

Fig. 4. Moment vs curvature (both dimensionless)

## Literatura / References

1. M. L. V. Prasad, P. R. Kumar, Prediction of the moment-curvature relationship of confined fiber reinforced self-compacting concrete, *Cement Wapno Beton*, **82**, 269-283 (2015).
2. T. S. Lok, J. R. Xiao, Flexural strength assessment of steel fiber reinforced concrete, *J. Mat. in Civil Eng.*, pp. 188-196 (1999).
3. K. Ramesh, D. R. Seshu, M. Prabhakar, Constitutive behavior of confined fiber reinforced concrete under axial compression, *Cem. Concr. Comp.*, **25**, 343-350 (2003).
4. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1992.
5. A. Ralston, *A first course in numerical analysis*, McGraw-Hill, New York 1965.
6. EN 1992-1-1:2005. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for building, CEN (2005).

of the bending moments occurs for  $\tilde{\varepsilon} \cong 1,3$ , meaning that in the post-peak response hardening prevails, (2).

## 6. Conclusions

1. The unified and normalized stress-strain curve is very well modelled the character of experimental data.
2. The rational function index is the same as in the previously proposed double curvilinear form.
3. The proposed stress-strain relationship can be easily integrated.
4. The extrapolation of the presented formulae onto bending case is easy and gives reasonable results, however, some reserve should be undertaken unless suitable experimental verification would be carried out.